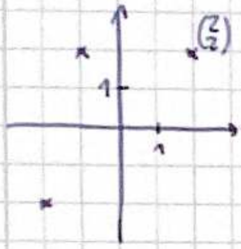
Vektoren I

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (Kartesisches Produkt)



$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

(Ebene)

$\mathbb{R}^3 \rightarrow$ 3D-Raum

$\mathbb{R}^n \rightarrow$ n-dimensionaler Raum

reeller Vektorraum: Menge V (Elemente aus $\mathbb{R}$) $\rightarrow \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{K} \rightarrow$ $\mathbb{K}$-Vektorr.

- $v, w \in V \Rightarrow w + v \in V$
- Addition ist assoziativ u. kommutativ
- es gibt ein Nullelement $0 \in V$ mit $0 + v = v$
- $v \in V \Rightarrow -v \in V$, sodass $v + (-v) = 0$
- für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v \in V$
- für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$ u. $0 \cdot v = 0$
- $\lambda \cdot v + \mu \cdot v = (\mu + \lambda) \cdot v$ u. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$

$v, w \in V$
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$v \in V$ sind Vektoren

$\rightarrow$ Funktioniert basically genauso für Matrizen gleicher Dimensionen

Bsp.: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \{0\}, \mathcal{P}$ sind Vektorräume
Polynome

m×n Matrizen sind Vektorräume

Untervektorraum $W \subset V$: W bezüglich + u. · abgeschlossen ist:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \; \forall w_1, w_2 \in W$ gilt $\lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 \in W$ u. hat ein Nullelement

z.B. $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

Vektoren II

Linearkombination:

$$\boxed{\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j} \in V$$

(im V mit $v_1, v_2, \ldots v_r \in V$ u. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}$)

Für $v_1, v_2, \ldots v_r \in V$ ist

$\{\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}\}$

ein Untervektorraum von V

$\boxed{\mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots v_r)} = \boxed{\langle v_1, v_2, \ldots v_r \rangle_{\mathbb{R}}}$ linearer Spann / lineare Hülle

wenn $\boxed{\langle v_1, v_2, \ldots v_r \rangle_{\mathbb{R}} = V}$, dann sind $v_1, v_2, \ldots v_r$ ein Erzeugendensystem von V und jeder $v \in V$ lässt sich als deren Linearkombination schreiben

↳ muss aber nicht eindeutig sein

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots \lambda_r \cdot v_r = \underline{0}$ → nicht alle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r = 0$

→ Linear abhängig,

sonst linear unabhängig

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem

→ Darstellung jedes $v \in V$ eindeutig

- jeder $V \neq \{\underline{0}\}$ hat eine Basis
- zwei Basen eines V haben gleich viele Elemente („sind gleich lang")
- Dimension von V: Länge seiner Basen
- Untervektorräume sind Geraden/Ebenen durch $\underline{0}$, deren Basen die Vektoren sind, die diese Geraden/Ebenen aufspannen
- mehrere linear unabhängige Vektoren in V lassen sich diese durch weitere Vektoren zu einer Basis ergänzen

$\boxed{n+1 \text{ Vektoren in } \mathbb{R}^n \text{ sind l.a.}}$

Vektoren III

Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathbb{R}$$

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Symmetrie
- $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ } Linearität
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ u. $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ positive Definitheit

Bilinearität
$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
$\langle x, y+z \rangle = \langle x y \rangle + \langle x z \rangle$

Euklidische Norm / Euklidische Länge

$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Bsp. $e_1, \ldots e_n$ Standard Basis-Vektoren des $\mathbb{R}^n$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{Bmatrix} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} =: \delta_{ij}$$ (Kronecker-Delta)

$\|e_j\| = 1$ (obviously)

$\mathbb{R}^n$ mit $\| \cdot \|$ bildet einen euklidischen Vektorraum

$x, y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal $(x \perp y)$ wenn $\langle x, y \rangle = 0$

$x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\quad \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha)$ → gilt auch im $\mathbb{R}^n$

$A_{\square} = \sqrt{\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$ $\quad v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ → Seiten des $\square$

Cosinussatz: $c^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma) = a^2 + b^2$

Geraden u. Ebenen I

$\boxed{g: \{ P + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}}$ Gerade

$0 \in g \rightarrow g$ ist ein Untervektorraum

$0 \notin g \rightarrow g$ ist kein U.V. $\rightarrow$ affine Gerade

$\boxed{E = \{ P + \lambda(Q-P) + \mu \cdot (R-P) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}}$ Ebene

(P, Q, R auf Ebene E)

$0 \in E \rightarrow E$ ist UV

$0 \notin E \rightarrow$ affine Ebene

Abstand von $\boxed{P}$ und $\boxed{g = \{ u + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}}$:

$\boxed{d(P, g) = d(P, L)}$, wo

$$\boxed{L = u + \underbrace{\frac{\langle P-u, v \rangle}{\|v\|^2}}_{\lambda_0} \cdot v}$$

Abstand von $\boxed{P}$ und $\boxed{E = \{ x \mid \langle x, n \rangle = d \}}$

$\boxed{d(P, E) = d(P, L) = \frac{|d - \langle P, n \rangle|}{\|n\|}}$, wo

$$\boxed{L = P + \frac{d - \langle P, n \rangle}{\|n\|^2} \cdot n}$$

(windschief)

Abstand von $\boxed{g = \{ p + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}}$ u. $\boxed{h = \{ q + \mu \cdot w \mid \mu \in \mathbb{R} \}}$

$\boxed{d(g, h) = d(L_g, L_h), = \frac{|\langle q - p, n \rangle|}{\|n\|}}$ $\boxed{n = v \times w}$

wo $\overrightarrow{L_g L_h} \perp v$ u. $\overrightarrow{L_g L_h} \perp w$

Geraden u. Ebenen II

Ebene Normalform

$$\boxed{E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - P, n \rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = d\}}$$

Normalenvektor

$\boxed{d = \langle P, n \rangle}$

Aufpunkt (beliebiger Punkt auf E)

$\boxed{\|n\| = 1}$ → Hessesche Normalform

Kreuzprodukt / Vektorprodukt

$$\boxed{v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 23 - 32 \\ 31 - 13 \\ 12 - 21 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{v \times w = -w \times v}$$